

УДК 624.021

Собственные частоты вертикальных колебаний мостовых опор немассивной конструкции

В. Н. Смирнов, А. В. Ланг

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

Для цитирования: Смирнов В. Н., Ланг А. В. Собственные частоты вертикальных колебаний мостовых опор немассивной конструкции // Известия Петербургского государственного университета путей сообщения. — СПб.: ПГУПС, 2025. — Т. 22. — Вып. 3. — С. 722–728. DOI: 10.20295/1815-588X-2025-3-722-728

Аннотация

Цель: Предложение методики определения собственных частот вертикальных колебаний мостовых опор немассивной конструкции, применяемых при строительстве эстакад на высокоскоростных железнодорожных магистралях. **Методы:** В статье рассматривается модель опоры в виде стержня с распределенной массой, имеющая в верхней части сосредоточенную массу, моделирующую влияние пролетного строения, опирающегося на опору. **Результаты:** Приведенные в статье данные дают возможность установить, при каких параметрах опоры можно определять собственную частоту ее вертикальных колебаний без учета упругости материала опоры и ее основания. **Практическая значимость:** Знание параметров опоры, при которых можно не учитывать упругость материала опоры и ее основания, позволяет повысить точность определения собственных частот вертикальных колебаний опор, что особенно важно при сооружении опор мостовых сооружений в виде эстакады или немассивных конструкций, применяемых при строительстве высокоскоростных железнодорожных магистралей.

Ключевые слова: Собственные частоты, мостовые опоры немассивной конструкции, высокоскоростные железнодорожные магистрали (ВСМ), динамика, мосты.

Введение

Динамический расчет мостового сооружения требует проверки всех его элементов на динамические воздействия как со стороны подвижного состава, так и от прочих временных нагрузок, включая, например, сейсмические. Для проверки несущей способности моста по второй группе предельных состояний нормы проектирования требуют проверки объекта на колебания. При этом становится важным значение динамических свойств мостового сооружения, в частности частоты свободных колебаний. При расчете обычно учитывают динамическое поведение пролетных строений, но в определенных усло-

виях, принимая во внимание взаимосвязанность элементов моста (эстакада, путепровод, виадук), необходимо определять собственные частоты колебаний опор как элементов сооружения, особенно в вертикальном направлении. Особенно это представляет интерес для опор малой массивности, что характерно, например, для эстакад, виадуков и путепроводов на фундаментах мелкого заложения.

Приближенно собственную частоту такой опоры можно определить, рассмотрев ее как стойку с распределенной массой, опирающуюся на жесткое (например, скальное) основание (рис. 1) или на упругоподатливое основание.

1. Случай жесткого основания

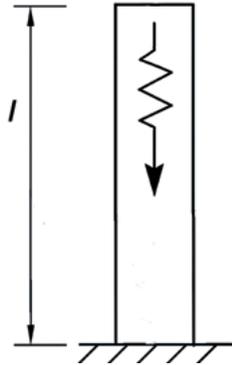


Рис. 1. Расчетная схема опоры как жестко опертого стержня

В этом случае решение задачи можно получить [1], учитывая, что для нижнего конца стойки при $x = l, u_1 = 0$, иначе $u_0 \cos kl = 0$.

Отсюда:

$$kl = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi.$$

Наименьшее значение K : $K = \frac{\pi}{2l}$.

Низшая частота опоры как стойки с зашпеченным концом может быть определена по формуле [1]:

$$\lambda = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m}}, \tag{1}$$

где l — высота стойки;

EF — жесткость стойки при осевом действии силы;

m — погонная масса опоры.

Приведенная к верху стойки масса опоры $M_{пр}$ определяется из условия равенства частоты при распределенной и точечной массе:

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{EF}{m} = \frac{EF}{M_{пр}l}, \tag{2}$$

откуда

$$M_{пр} = \frac{ml}{0,25\pi^2} \approx 0,405 ml. \tag{3}$$

При наличии сосредоточенного на верхнем конце стойки груза массой M_{nc} в этих условиях частоты свободных колебаний стойки с распределенной массой можно найти при решении трансцендентного уравнения [1]:

$$\tan kl = -\frac{kEF}{M_c l \lambda^2}, \tag{4}$$

где $M_c = M_{пр} + M_{nc}$.

2. Случай упругоподатливого основания

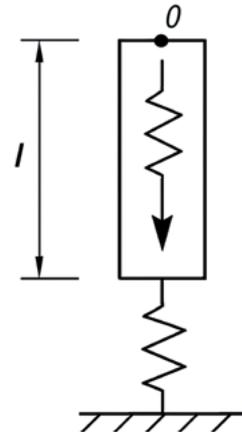


Рис. 2. Расчетная схема опоры как стержня, опертого на податливое основание

В работе [1] приведено решение задачи по определению частот свободных колебаний упруго опертого стержня с распределенной массой при наличии в верхней части груза массой M_{nc} :

$$1 - \frac{C}{EF} \frac{\tan kl}{k} = \frac{EF}{M_{nc} \lambda^2 + \frac{C}{EF}}, \tag{5}$$

где C — коэффициент податливости нижнего конца стержня;

EF — жесткой стойки.

Зная C , определяется kl и, таким образом, весь спектр собственных частот стойки.

Представляет интерес определение пределов, при которых можно пренебречь влиянием упругости опоры на ее собственные частоты и считать тело абсолютно жестким.

Это значительно упрощает решение задачи по определению частот свободных колебаний опоры (в вертикальном направлении), рассматриваемой в виде стойки на упругоподатливом основании с равномерно распределенной массой и имеющей сосредоточенную массу в верхнем конце.

Динамическая работа опор немассивной конструкции

Сооружение немассивных опор мостовых сооружений в виде многопролетных эстакад требует проверки их работы при динамическом воздействии высокоскоростного подвижного состава.

При следовании по мосту подвижного состава мостовая опора испытывает различные динамические воздействия, вызывающие в общем случае ее вертикальные, горизонтальные и вращательные колебания [1–4]. На характер колебаний опор существенно влияют инерционные, упругие и диссипативные свойства как самой опоры и пролетного строения, так и грунта основания опоры.

Далее рассматривается решение задачи о свободных колебаниях высокой облегченной промежуточной опоры балочного моста неразрезной системы на фундаменте мелкого заложения (на естественном основании). Такая конструкция наиболее оптимальна с экономической точки зрения для многопролетных эстакад на ВСМ. Опора моделируется упругим стержнем с равномерно распределенной массой по высоте, сечение стойки принято постоянным. Стойка опирается на упругое основание с коэффициентом жесткости C_1 . На верхнем конце стержня закреплена сосредоточенная масса M пролетного строения (рис. 3).

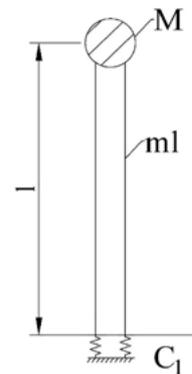


Рис. 3. Расчетная схема мостовой опоры

Продольные свободные колебания упругого стержня при отсутствии затухания определяются уравнением [5–9]:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

где $a^2 = E / \rho$;

$u(x, t)$ — продольные перемещения сечений стержня;

E — модуль упругости материала стержня;

ρ — плотность материала опоры;

t — время.

Граничные условия:

$$\text{При } x=0: EF \frac{\partial u}{\partial x} = M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7)$$

$$\text{При } x=l: EF \frac{\partial u}{\partial x} = -C_1 u.$$

Здесь:

l — длина стержня;

F — площадь поперечного сечения стержня;

M — сосредоточенная масса на вершине стержня.

В результате решения дифференциального уравнения (6) с граничными условиями (7) получаем собственные функции и частоты из уравнений выражений (8) и (9) при предельном переходе [10].

$$X_i = \cos(Z_i \xi) - \alpha Z_i \sin(Z_i \xi). \quad (8)$$

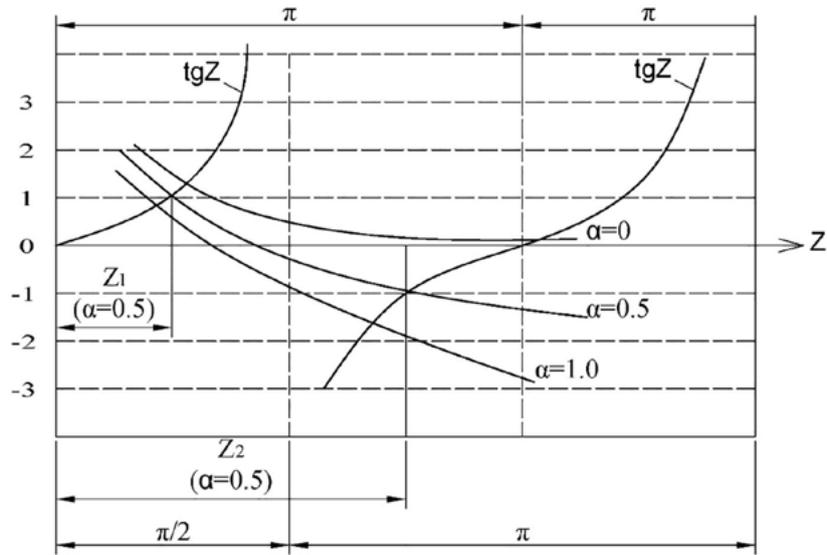


Рис. 4. Графическое решение уравнения (4) при æ² = 0,5

$$\operatorname{tg}(Z_i) = \frac{\alpha^2 - \alpha Z_i^2}{Z_i(\alpha^2 \alpha^2 + 1)}, i=1,2,\dots \quad (9)$$

Здесь: $\alpha^2 = \frac{C_1 l}{EF}$; $\alpha = \frac{M}{ml}$; $\xi = \frac{x}{l}$.

Графически уравнение (4) показано на рис. 4.

Искомые частоты свободных колебаний λ_i и корни частотного уравнения Z_i связаны зависимостью:

$$\lambda_i = Z_i \frac{\alpha}{l} \quad (10)$$

После преобразований выражение (5) может быть приведено к виду:

$$\lambda_i = \lambda_0 K_i \quad (11)$$

Здесь λ_0 — частота свободных вертикальных колебаний рассматриваемой системы как твердого тела на упругом основании, определяемая по формуле:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{C_1}{ml(\alpha + 1)}} \quad (12)$$

K_i — коэффициент, характеризующий влияние упругости опоры на собственные частоты.

Его величина определяется по формуле:

$$K_i = Z_i \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha^2}} \quad (13)$$

Графики изменения коэффициента K_i , построенные по результатам расчетов по формуле (8) в зависимости от изменения параметров α и α^2 , представлены на рис. 5. Значения α и α^2 охватывают практически все возможные их значения в реальных условиях.

Зная параметры $\alpha = \frac{M}{ml}$ и $\alpha^2 = \frac{C_1 l}{EF}$, по формуле (6) и графикам легко определить наиболее важную низшую частоту свободных вертикальных колебаний рассматриваемой системы.

Из рис. 3 видно, что до некоторого предела, определяемого параметрами $\alpha^2 \leq 0,3$ и $\alpha \leq 4$, можно пренебрегать влиянием упругости опоры на вертикальные колебания системы «опора — грунтовое основание» и считать опору абсолютно жесткой. Получаемая при этом ошибка в определении основной (первой) частоты вертикальных колебаний системы не превышает 10%.

В других случаях пренебрежение упругостью мостовой опоры в практических расчетах может дать значительные погрешности.

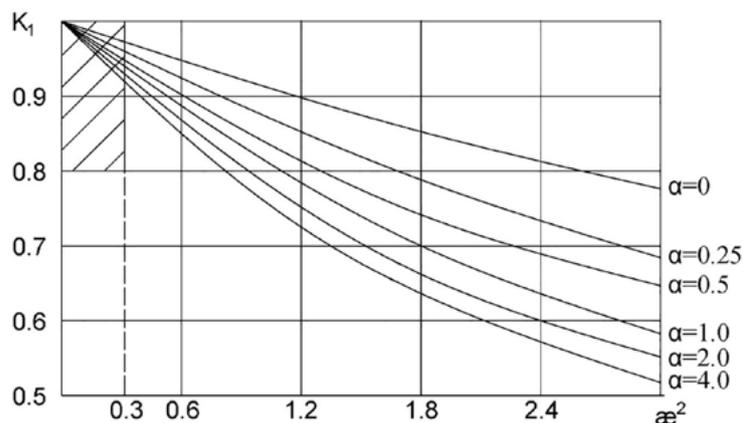


Рис. 5. Зависимость коэффициента K_1 от параметров α и α^2
(заштрихована зона, в пределах которой допускается пренебрежение упругостью)

Заключение

1. Рассмотрена методика определения собственных частот вертикальных свободных колебаний мостовой опоры на естественном основании.

2. Получены значения параметров мостовой опоры, при которых можно пренебречь влиянием упругости опоры на вертикальные колебания системы «опора — грунтовое основание» и считать ее абсолютно жесткой.

Список источников

1. Снитко Н. К. Динамика сооружений / Н. К. Снитко. — Л.: Госстройиздат, 1960.
2. Снитко Н. К. Продольные колебания стержня с распределенной массой при наличии упругой податливости концов / Н. К. Снитко // Вопросы динамики и динамической прочности. — Рига: Изд-во АН Латвийской ССР, 1955. — Вып. 3.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. — М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959. — 439 с.
4. Яблонский А. А. Курс теории колебаний / А. А. Яблонский, С. С. Нарейко. — М.: Высшая школа, 1975. — 248 с.
5. Степанов Г. Н. О расчете свайных фундаментов на действие импульсных нагрузок / Г.Н. Степанов // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1968. — № 5.

6. Смирнов В. Н. Мосты на высокоскоростных железнодорожных магистралях / В.Н. Смирнов, А.А. Барановский // СПб ПГУПС. — 2015. — С. 274.

7. Смирнов В. Н. Опоры мостовых сооружений (проектирование, строительство, ремонт и реконструкция): учебное пособие / В. Н. Смирнов. — СПб.: Изд-во ДНК, 2013. — 568 с.

8. Смирнов В. Н. Влияние параметров мостовых сооружений высокоскоростных железнодорожных магистралей на динамические свойства системы «мост-бесстыковой путь» / В. Н. Смирнов, Е. Е. Луковников // Известия ПГУПС. — 2024. — Т. 26. — № 2. — С. 449–456.

9. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. — М.: Наука, 1968. — 559 с.

10. Смирнов В. Н. Вопросы проектирования и строительства мостовых сооружений для отечественных ВСМ / В. Н. Смирнов // Известия ПГУПС. — 2023. — Т. 20. № 3. — С. 645–657.

Дата поступления: 07.04.2025

Решение о публикации: 01.06.2025

Контактная информация:

СМИРНОВ Владимир Николаевич — д-р техн. наук, проф. кафедры «Мосты»; svn193921@rambler.ru
ЛАНГ Андрей Владимирович — инженер ИЛ «Мостовая лаборатория» кафедры «Мосты»; langandrew@yandex.ru

Vertical Natural Frequency Vibrations of Non-Massive Bridge Supports

V. N. Smirnov, A. V. Lang

Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russian Federation

For citation: Smirnov V. N., Lang A. V. Vertical Natural Frequency Vibrations of Non-Massive Bridge Supports // *Proceedings of Petersburg State Transport University*, 2025, vol. 22, iss. 3, pp. 722–728. (In Russian) DOI: 10.20295/1815-588X-2025-3-722-728

Summary

Purpose: The study proposes a methodology for determining the natural frequencies of vertical vibrations of non-massive bridge supports used in the construction of high-speed railway viaducts. **Methods:** The article sets out to explore a support model, which is represented by a rod with distributed mass, featuring a concentrated mass at the top. This mass simulates the influence of the superstructure resting on the support. **Results:** The presented data enable the identification of the support parameters under which the natural frequency of its vertical vibrations can be determined without consideration of the elasticity of the support material and its foundation. **Practical significance:** Understanding the support parameters that enable the disregard of the elasticity of the support and foundation material enhances the precision of determining the natural frequencies of vertical vibrations. This is of particular importance in the construction of bridge supports, such as viaducts, and other non-massive structures used in the construction of high-speed railways.

Keywords: Natural frequencies, non-massive bridge supports, high-speed railways (HSR), dynamics, bridges.

References

1. Snitko N. K. *Dinamika sooruzheniy* [Dynamics of structures]. Leningrad: Gosstroizdat Publ., 1960. (In Russian)
2. Snitko N. K. Prodol'nye kolebaniya sterzhnya s raspredelennoy massoy pri nalichii uprugoy podatlivosti kontsov [Longitudinal vibrations of a rod with distributed mass in the presence of elastic flexibility of the ends]. *Voprosy dinamiki i dinamicheskoy prochnosti* [Issues of dynamics and dynamic strength]. Riga: Izd-vo AN Latvyskoy SSR Publ., 1955, Iss. 3. (In Russian)
3. Timoshenko S. P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in engineering]. Moscow: Gos. izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1959, 439 p. (In Russian)
4. Yablonskiy A. A., Nareyko S. S. *Kurs teorii kolebaniy* [Course of vibration theory]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1975, 248 p. (In Russian)
5. Stepanov G. N. O raschete svaynykh fundamentov na deystvie impul'snykh nagruzok [On the calculation of pile foundations for the action of impulse loads]. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov* [Foundations, foundations and soil mechanics]. 1968, Iss. 5. (In Russian)
6. Smirnov V. N., Baranovskiy A. A. *Mosty na vysokoskorostnykh zheleznodorozhnykh magistralyakh* [Bridges on high-speed railway lines]. Saint Petersburg: PGUPS Publ., 2015, p. 274. (In Russian)
7. Smirnov V. N. *Opory mostovykh sooruzheniy (proektirovanie, stroitel'stvo, remont i rekonstruktsiya): uchebnoe posobie* [Supports of bridge structures (design, construction, repair and reconstruction): textbook]. Saint Petersburg: DNK Publ., 2013, 568 p. (In Russian)
8. Smirnov V. N., Lukovnikov E. E. Vliyanie parametrov mostovykh sooruzheniy vysokoskorostnykh zheleznodorozhnykh magistralyakh na dinamicheskie svoystva sistemy "most — bestykovoy put'" [Influence of parameters of bridge structures of high-speed railway lines on the dynamic properties of the "bridge — continuous track" sys-

tem]. *Izvestiya PGUPS* [Proceedings of Petersburg Transport University]. 2024, vol. 26, Iss. 2, pp. 449–456. (In Russian)

9. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 559 p. (In Russian)

10. Smirnov V. N. Voprosy proektirovaniya i stroitel'stva mostovykh sooruzheniy dlya otechestvennykh VSM [Issues of design and construction of bridge structures for domestic high-speed railways]. *Izvestiya PGUPS* [Proceedings of Petersburg Transport University]. 2023, vol. 20, Iss. 3, pp. 645–657. (In Russian)

Received: April 07, 2025

Accepted: June 01, 2025

Author's information:

Vladimir N. SMIRNOV — Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Bridges; svn193921@rambler.ru

Andrei V. LANG — Engineer, Bridge Laboratory, Department of Bridges; langandrew@yandex.ru