

УДК 681.513.2

Линеаризация модели движения многосвязного динамического объекта методом псевдокоординатной линеаризации

Мануйлов Юрий Сергеевич — д-р техн. наук, профессор, независимый исследователь. Научные интересы: управление сложными организационно-техническими объектами, оптимизация комплексов операций. E-mail: manuilov.yuriy@yandex.ru

Толоконников Андрей Валерьевич¹ — канд. техн. наук, преподаватель кафедры космического радиоэлектронного контроля. Научные интересы: управление сложными организационно-техническими объектами, эксплуатация технических систем. E-mail: andrew-tolokonnikov@rambler.ru

¹Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, Россия, 197198, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13

Для цитирования: Мануйлов Ю. С., Толоконников А. В. Линеаризация модели движения многосвязного динамического объекта методом псевдокоординатной линеаризации // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2025. № 3 (43). С. 58–67. DOI: 10.20295/2413-2527-2025-343-58-67.

Аннотация. *Предлагается метод линеаризации нелинейной модели управляемого движения многосвязного динамического объекта с присоединенными упругими элементами конструкции. Метод основан на использовании неособых преобразований гладких многообразий на основе известной алгебры Ли. Цель: применение хорошо разработанной теории оптимального управления линейными на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина или принципа оптимальности Р. Беллмана. Методы: рассматривается общетеоретический подход псевдокоординатной линеаризации, который затем иллюстрируется процедурой линеаризации модели управляемого углового движения телеуправляемого летательного аппарата. Практическая значимость: получена конечномерная математическая модель, применимая для решения задач синтеза оптимального, робастного и финитного управления пространственным угловым движением телеуправляемого летательного аппарата.*

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, псевдокоординатная линеаризация, оптимальное, робастное и финитное управление

1.2.2 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки); **2.9.8** — интеллектуальные транспортные системы (технические науки)

Введение

Системы наблюдения, размещенные на телеуправляемых летательных аппаратах, в настоящее время являются основным источником информации для решения расчетных и аналитических задач, связанных с наблюдением и прогнозированием различных процессов природного или техногенного характера [1].

Большой объем информации, необходимой для управления, с одновременным требованием сокращения времени на ее прохождение и обработку приводит к необходимости совершенствования информационного обмена в системе управления [2]. Важное значение для формирования эффективной системы имеет учет динамики присоединенных

упругих элементов конструкции, которые могут обладать значительными размерами.

Таким образом, для решения задачи управления движением целесообразно разработать модель, которая позволяла бы в режиме реального времени учитывать динамику присоединенных элементов при формировании управляющих воздействий.

Точная линеаризация математических моделей динамических систем

Пусть процесс управляемого движения объекта описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида [3–6]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — n -мерный вектор состояния (n — четное); $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — n -мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция (векторное поле), определенная на $U \subset R^n$ (в общем случае — на любом дифференцируемом многообразии); $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ ($n \times m$) — матрица-функция с непрерывно дифференцируемыми компонентами ($m = n/2$); $\mathbf{u}(t) = \text{col}(u_j(t), j = \overline{1, m})$ — кусочно-непрерывная m -мерная вектор-функция управления.

Будем искать неособое преобразование системы (1) в линейную систему вида:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}^1 = \mathbf{z}^2; \\ \dot{\mathbf{z}}^2 = \mathbf{w} \end{cases}, \quad (2)$$

где $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2$ — m -мерные векторы фазовых координат и фазовых скоростей;

$\mathbf{w} = \text{col}(w_i, i = \overline{1, m})$ — m -мерный вектор управлений, где w_i — кусочно-непрерывные функции.

Заметим, что соотношения (2) описывают динамику системы из m независимых двойных интеграторов.

Перепишем систему (1) в следующем эквивалентном виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m u_j(t) \mathbf{g}_j(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}), j = \overline{1, m}$ — вектор-столбцы матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.

Искомое линеаризующее преобразование $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \mathbf{w})$ должно обладать тем свойством, что $\mathbf{z}^1$ и $\mathbf{z}^2$ зависят только от $\mathbf{x}$, а $\mathbf{w}$ — от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{z}^1 = \mathbf{z}^1(\mathbf{x}); \mathbf{z}^2 = \mathbf{z}^2(\mathbf{x}); \mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (3)$$

Продифференцируем по t компоненты вектор-функций $\mathbf{z}^1(\mathbf{x})$ и $\mathbf{z}^2(\mathbf{x})$:

$$\frac{dz_i^k}{dt} = \left\langle \frac{\partial z_i^k}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial z_i^k}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\rangle + \sum_{j=1}^m u_j \left\langle \frac{\partial z_i^k}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right\rangle, \quad (4)$$

где $k = 1, 2$; $i, j = \overline{1, m}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — обозначает скалярное произведение векторов.

Из (2) с учетом соотношений (3) и (4) следует, что

$$\left\langle \frac{\partial z_i^1}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right\rangle \equiv 0, \quad i, j = \overline{1, m},$$

и, соответственно,

$$\begin{cases} \dot{z}_i^1 = \left\langle \frac{\partial z_i^1}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\rangle; \\ \dot{z}_i^2 = \left\langle \frac{\partial z_i^2}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right\rangle + \sum_{j=1}^m u_j \left\langle \frac{\partial z_i^2}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right\rangle = w_i, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (5)$$

Введем в рассмотрение математическую кон-

струкцию $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} f - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} g$, называемую скоб-

ками Ли от f и g , где f и g — C^∞ (бесконечно дифференцируемые) гладкие векторные поля на

R^n , а также $L_f(\omega) = \left(\frac{\partial \omega^T}{\partial \mathbf{x}} f \right)^T + \omega \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$, называемую

Ли-производной ω по направлению векторного поля f и $L_f \langle \omega, g \rangle = \langle L_f(\omega), g \rangle + \langle \omega, [f, g] \rangle$, называемую Ли-производной скалярного произведения $\langle \omega, g \rangle$ по направлению векторного поля f .

Преобразуем скалярные произведения

$$\left\langle \frac{\partial z_i^2}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right\rangle$$

к следующему виду:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial z_i^2}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right\rangle &= \left\langle L_f \left(\frac{\partial z_i^1}{\partial \mathbf{x}} \right), \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right\rangle = \\ &= L_f \left\langle \frac{\partial z_i^1}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial z_i^1}{\partial \mathbf{x}}, [f, \mathbf{g}_j(\mathbf{x})] \right\rangle = \\ &= - \left\langle \frac{\partial z_i^1}{\partial \mathbf{x}}, [f, \mathbf{g}_j] \right\rangle, \quad i, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, задача отыскания точного линейаризующего преобразования сводится к решению переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left\langle \frac{\partial z_i^1}{\partial x}, g^j(x) \right\rangle = 0, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

с ограничениями

$$\left\langle \frac{\partial z_i^1}{\partial x}, [f(x), g_j(x)] \right\rangle \neq 0, \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (8)$$

В свою очередь, решение системы (7)–(8) может быть найдено по следующей методике.

Сначала решается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{ds_1} = [f(x), g^1(x)], \quad s_1 \in [0, +\infty)$$

с начальными условиями $x(0) = 0$.

Затем решается система:

$$\frac{dx}{ds_2} = [f(x), g^2(x)], \quad s_2 \in [0, +\infty)$$

с начальными условиями $x(s_1, 0) = x(s_1)$.

И так далее до системы:

$$\frac{dx}{ds_m} = [f(x), g^m(x)], \quad s_m \in [0, +\infty)$$

с начальными условиями:

$$x(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, 0) = x(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}).$$

После этого последовательно решаются системы:

$$\frac{dx}{dt_1} = g^1(x), \quad t_1 \in [0, +\infty), \quad x(s_1, \dots, s_m, 0) = x(s_1, \dots, s_m);$$

$$\frac{dx}{dt_2} = g^2(x), \quad t_2 \in [0, +\infty), \quad x(s_1, \dots, s_m, 0) = x(s_1, \dots, s_m);$$

...

$$\frac{dx}{dt_m} = g^m(x), \quad t_i \in [0, +\infty),$$

с начальными условиями:

$$x(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_{m-1}, 0) = x(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_{m-1}).$$

В результате получаем выражения для компонент x_i , $i = \overline{1, n}$ вектора состояния в функции от s_j, t_j , $j = \overline{1, m}$:

$$x_i = x_i(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m) \quad i = \overline{1, m}.$$

Далее необходимо проверить условия:

– несингулярность матрицы управляемости

$$[g^1 | \dots | g^m | [f, g^i] | [f^m, g^m]];$$

– инволютивность множества

$$\{g^1, \dots, g^m, [f, g^i], \dots, [f^m, g^m]\};$$

– удовлетворение матрицы Якоби

$$J_1 = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)}$$

(характеристической матрицы) условию пропорций на $U \subset R^n$.

Определение 1. Характеристическая матрица $J(s_1, t_1, \dots, t_{n-1})$ удовлетворяет условию пропорций на $U \subset R^n$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для абсолютных значений ее главных миноров $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ выполняются соотношения:

$$|\Delta_1| \geq \varepsilon, \quad \frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} \geq \varepsilon, \dots, \quad \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_{n-1}|} \geq \varepsilon$$

на всем $U \subset R^n$.

При выполнении вышеперечисленных условий преобразование координат взаимно однозначно и можно положить:

$$z_j^1 = s_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Заметим, что величины z_j^1 , $j = \overline{1, m}$ в соотношении (9) могут задаваться произвольными непрерывно дифференцируемыми функциями:

$$z_j^1 = F_j(s_j), \quad j = \overline{1, m},$$

обладающими следующими свойствами:

$$F_j(0) = 0; \quad \frac{\partial F_j}{\partial s_j} \neq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Соответствующие выражения для z_j^2 и w_j , $j = \overline{1, m}$ могут быть получены с использованием соотношений (5):

$$z_j^2 = \left\langle \left(\frac{\partial z_j^1}{\partial s_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial s_j}{\partial x} \right), f(x(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)) \right\rangle;$$

$$w_j = \left\langle \frac{\partial z_j^2}{\partial x}, f(x(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)) \right\rangle + \\ + \sum_{k=1}^m u_k \left\langle \frac{\partial z_j^2}{\partial x}, g^k(x(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)) \right\rangle, \quad j = \overline{1, m}.$$

Далее необходимо найти область U в пространстве $(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)$, в которой матрица Якоби

$$J_2 = \frac{D(z_1^1, \dots, z_m^1, z_1^2, \dots, z_m^2)}{D(s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)}$$

удовлетворяет условию пропорций (по определению 1). Если эта область — непустое множество, то преобразование $(z_1^1, \dots, z_m^1, z_1^2, \dots, z_m^2) \rightarrow (s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)$ будет взаимно-однозначным на U .

Глобальное взаимно-однозначное преобразование $x \rightarrow z^1, z^2$ будет определено на пересечении B областей U и B^* :

$$B = U \cap B^*,$$

где B^* — прообраз области B при преобразовании $x \rightarrow (s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_m)$.

При этом в области B соотношения для z_j^1, z_j^2 и $w_j, j = \overline{1, m}$ могут быть выражены в функции переменных $x_i, i = \overline{1, n}, u_j, j = \overline{1, m}$. Кроме того, из соотношений (5), (6), (8) следует, что выражения для $w_j, j = \overline{1, m}$ могут быть разрешены относительно $u_j, j = \overline{1, m}$.

Таким образом, задача поиска точного преобразования системы (1) в линейную систему (2) полностью решена.

Трансформация математической модели управляемого углового движения твердого тела на основе линеаризующих псевдокоординатных отображений

Применим методику точных псевдокоординатных отображений для преобразования кинематических соотношений и нелинейных динамических уравнений Эйлера, описывающих управляемое угловое движение твердого тела, к линейной форме.

Рассмотрим сначала случай, когда оси связанной системы координат совпадают с главными осями инерции твердого тела, а относительное положение связанной и опорной (базовой) систем

координат задается последовательностью углов Эйлера — Крылова [1, 5]:

$$\gamma \rightarrow \psi \rightarrow \theta.$$

При этом угловое движение твердого тела может быть описано следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = [\omega_1 \cos(\theta) - \omega_2 \sin(\theta)] / \cos(\psi); \\ \dot{\psi} = \omega_1 \sin(\theta) + \omega_2 \cos(\theta); \\ \dot{\theta} = \omega_3 + tg(\psi)[\omega_2 \sin(\theta) + \omega_1 \cos(\theta)]; \\ \dot{\omega}_1 = a_1 \omega_2 \omega_3 + u_1(t); \\ \dot{\omega}_2 = a_2 \omega_1 \omega_3 + u_2(t); \\ \dot{\omega}_3 = a_3 \omega_1 \omega_2 + u_3(t), \end{cases} \quad (10)$$

где γ, ψ, θ — соответственно углы крена, рыскания и тангажа (углы Эйлера — Крылова);

$\omega_i, i = \overline{1, 3}$ — проекции угловой скорости вращения объекта на связанные оси;

$$a_1 = (J_2 - J_3) / J_1;$$

$$a_2 = (J_3 - J_1) / J_2;$$

$$a_3 = (J_1 - J_2) / J_3;$$

$J_i, i = \overline{1, 3}$ — главные моменты инерции;

$u_i, i = \overline{1, 3}$ — управляющие ускорения по связанным осям. Используя описанную выше методику, будем искать преобразование, приводящее систему (10) к линейной форме:

$$\dot{x}^1 = x^2; \quad \dot{x}^2 = v, \quad (11)$$

где $x^1 = col(x_i^1, i = \overline{1, 3}), x^2 = col(x_i^2, i = \overline{1, 3})$ — векторы фазовых координат и фазовых скоростей в пространстве преобразованных переменных; $v = col(v_i, i = \overline{1, 3})$ — вектор-функция управлений.

Необходимо найти вектор-функции x^1, x^2 и v , такие, что:

$$x^1 = x^1(\varphi, \omega); \quad x^2 = x^2(\varphi, \omega); \quad v = v(\varphi, \omega, u), \quad (12)$$

где компоненты вектора $\varphi = col(\gamma, \psi, \theta)$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

Перепишем систему (10) следующим образом:

$$\dot{\alpha} = f(\alpha) + \sum_{j=1}^3 u_j g^j, \quad (13)$$

где $\alpha = col(\varphi, \omega); g^1 = col(0, 0, 0, 1, 0, 0);$

$$g^2 = col(0, 0, 0, 0, 1, 0); \quad g^3 = col(0, 0, 0, 0, 0, 1);$$

$$f(\alpha) = \begin{bmatrix} (\omega_1 \cos(\theta) - \omega_2 \sin(\theta)) / \cos(\psi) \\ \omega_1 \sin(\theta) + \omega_2 \cos(\theta) \\ \omega_3 + tg(\psi)[\omega_2 \sin(\theta) - \omega_1 \cos(\theta)] \\ a_1 \omega_2 \omega_3 \\ a_2 \omega_1 \omega_3 \\ a_3 \omega_1 \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя скобки Ли

$$[f, g^j] = \frac{\partial g^j}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g^j, \quad j = \overline{1, 3}, \text{ находим:}$$

$$[f, g^1] = \begin{bmatrix} -\cos(\theta) / \cos(\psi) \\ -\sin(\theta) \\ tg(\psi) \cos(\theta) \\ 0 \\ -a_2 \omega_3 \\ -a_3 \omega_2 \end{bmatrix};$$

$$[f, g^2] = \begin{bmatrix} \sin(\theta) / \cos(\psi) \\ -\cos(\theta) \\ -tg(\psi) \sin(\theta) \\ -a_1 \omega_3 \\ 0 \\ -a_3 \omega_1 \end{bmatrix};$$

$$[f, g^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -a_1 \omega_2 \\ -a_2 \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Разрешая систему

$$\frac{d\alpha}{ds_1} = [f, g^1], \quad s_1 \in [0, +\infty), \quad \alpha(0) = 0, \text{ находим:}$$

$$\gamma(s_1) = -s_1, \quad \psi = 0, \quad \theta = 0, \quad \omega_i = 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Затем разрешаем систему:

$$\frac{d\alpha}{ds_2} = [f, g^2], \quad s_2 \in [0, +\infty), \quad \alpha(s_1, 0) = 0.$$

Продолжая процесс, приходим к последней системе:

$$\frac{d\alpha}{dt_3} = g^3, \quad t_3 \in [0, +\infty),$$

$$\alpha(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, 0) = \alpha(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2),$$

решение которой дает следующие соотношения:

$$\begin{cases} \gamma = -s_1; \quad \psi = -s_2; \quad \theta = -s_3; \\ \omega_1 = t_1; \quad \omega_2 = t_2; \quad \omega_3 = t_3. \end{cases} \quad (14)$$

Характеристическая матрица (якобиан) при этом имеет вид:

$$J_1 = \text{diag}(J_{ii} = -1, i = \overline{1, 3}; J_{jj} = 1, j = \overline{4, 6}).$$

Очевидно, что она удовлетворяет условию пропорций на R^6 (например, при $\varepsilon = 1/2$). Кроме того, система векторных $\{g^1, g^2, g^3, [f, g^1], [f, g^2], [f, g^3]\}$ показателей удовлетворяет условиям существования искомого взаимно однозначного преобразования системы (10) в систему (11) в области:

$$\begin{aligned} U = \{ \alpha : \gamma \in (-\pi, \pi), \\ \psi \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \forall \omega_i, i = \overline{1, 3} \}. \end{aligned}$$

Зададим параметры $x_i^1, i = \overline{1, 3}$ следующим образом:

$$x_i^1 = -s_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Дифференцируя эти равенства по t с учетом (11) и (14), получим:

$$\begin{cases} x_1^2 = \dot{x}_1^1 = \frac{\partial x_1^1}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \gamma} \dot{\gamma}(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3) = \\ = [t_1 \cos(s_3) + t_2 \sin(s_3)] / \cos(s_2); \\ x_2^2 = \dot{x}_2^1 = \frac{\partial x_2^1}{\partial s_2} \frac{\partial s_2}{\partial \psi} \dot{\psi}(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3) = \\ = -t_1 \sin(s_3) + t_2 \cos(s_3); \\ x_3^2 = \dot{x}_3^1 = \frac{\partial x_3^1}{\partial s_3} \frac{\partial s_3}{\partial \theta} \dot{\theta}(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3) = \\ = t_3 + tg(s_2)[t_2 \sin(s_3) + t_1 \cos(s_3)]. \end{cases} \quad (15)$$

Из (15) следует, что матрица Якоби J_2 преобразования

$$x^1 = x^1(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3);$$

$$x^2 = x^2(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3).$$

будет иметь вид:

$$J_2 = \frac{D(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_1^2, x_2^2, x_3^2)}{D(s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ss_2}{Cs_2^2} [t_1 Cs_3 + t_2 Ss_3] & \frac{1}{Cs_2^2} [-t_1 Ss_3 + t_2 Cs_3] & \frac{Cs_3}{Cs_2} & \frac{Ss_3}{Cs_2} & 0 \\ 0 & 0 & -t_1 Cs_3 - t_2 Ss_3 & -Ss_3 & Cs_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Cs_2^2} [t_1 Cs_3 + t_2 Ss_3] & tg(s_2) [t_2 Cs_3 + t_1 Ss_3] & Cs_3 tg(s_2) & Ss_3 tg(s_2) & 1 \end{bmatrix},$$

где $Ss_i = \sin(s_i)$; $Cs_i = \cos(s_i)$, $i = \overline{1,3}$.

Эта матрица удовлетворяет условию пропорций в области

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\theta) / \cos(\psi) & -\sin(\theta) / \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\psi) & 0 \\ -tg(\psi) \cos(\theta) & tg(\psi) \sin(\theta) & 1 \end{bmatrix}.$$

$$U = \{s_i, t_i : s_2, s_3 \in (-\pi/2, \pi/2), \forall s_i, \forall t_i, i = \overline{1,3}\},$$

так как ее последовательные главные миноры равны соответственно:

$$\Delta_1 = -1; \Delta_2 = 1; \Delta_3 = -1; \Delta_4 = -Cs_3 / Cs_2;$$

$$\Delta_5 = -1 / Cs_2; \Delta_6 = -1 / Cs_2.$$

Полученный результат вполне согласуется с утверждением, что глобальное взаимно однозначное преобразование (12) определено на U . Выражая x^1 и x^2 через φ и ω , получим:

$$\begin{cases} x_1^1 = \gamma; \\ x_2^1 = \psi; \\ x_3^1 = \theta; \end{cases} \begin{cases} x_1^2 = \dot{\gamma} = [\omega_1 \cos(\theta) - \omega_2 \sin(\theta)] / \cos(\psi); \\ x_2^2 = \dot{\psi} = \omega_1 \sin(\theta) + \omega_2 \cos(\theta); \\ x_3^2 = \dot{\theta} = \omega_3 + tg(\psi) [\omega_2 \sin(\theta) - \omega_1 \cos(\theta)]; \end{cases} \quad (16)$$

Соответствующие соотношения для

$$v_i(\varphi, \omega, u), i = \overline{1,3}$$

могут быть найдены с учетом (5) и (6):

$$v_i = \left\langle \frac{\partial x_i^2}{\partial \alpha}, f(\alpha) \right\rangle + \sum_{j=1}^3 u_j \left\langle \frac{\partial x_i^2}{\partial \alpha}, g^j \right\rangle, i = \overline{1,3}.$$

Перепишем это выражение в векторно-матричном виде:

$$v = h(\alpha) + H(\alpha)u, \quad (17)$$

$$\text{где } h(\alpha) = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial x_1^2}{\partial \alpha}, f(\alpha) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial x_2^2}{\partial \alpha}, f(\alpha) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial x_3^2}{\partial \alpha}, f(\alpha) \right\rangle \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix};$$

Вычисляя детерминант матрицы H , находим: $\det H = 1 / \cos(\psi)$. Очевидно, что $\det H \neq 0$ в области U и, следовательно, уравнения (17) могут быть разрешены относительно u_i , $i = \overline{1,3}$.

Таким образом, задачу построения взаимно однозначного преобразования системы (10) в систему (11) с областью определения U можно считать решенной. Необходимо отметить, что преобразование (16)–(17) означает переход от исходных координат (φ, ω) к нормальным координатам $(\varphi, \dot{\varphi})$ с одновременным изменением управляющих функций в соответствии с (17). В принципе, такой переход в рассмотренном случае может показаться достаточно очевидным. Однако предложенный подход применим и в существенно более сложных случаях, например когда вектор-функции g_j в (13) явно зависят от фазовых координат объекта. Кроме того, при его использовании имеется возможность нахождения области определения глобальных взаимно однозначных линеаризующих преобразований, что является определяющим при решении задач синтеза управления объектами рассматриваемого класса.

Обобщая полученные результаты, не составляет труда применить методику точной линеаризации и к общей динамической модели пространственного углового движения твердого тела с недиагональным тензором инерции и кинематическим соотношением, записанным с использованием углов Эйлера — Крылова для произвольной последовательности поворотов при совмещении координатных базисов.

Действительно, кинематические соотношения для произвольной последовательности углов Эйлера — Крылова $\varphi_i \rightarrow \varphi_j \rightarrow \varphi_k$, $i, j, k = \overline{1, 3}$, $i \neq j \neq k$ можно представить в виде:

$$\dot{\varphi} = \Psi(\varphi)\omega, \quad (18)$$

где $\varphi = \text{col}(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k)$ — матрица-столбец углов Эйлера — Крылова;

$\omega = \text{col}(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$, $i, j, k = \overline{1, 3}$, $i \neq j \neq k$ — вектор угловой скорости объекта в проекциях на оси связанной системы координат (ССК);

$$\Psi(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_k) / \cos(\varphi_j) & -\xi \sin(\varphi_k) / \cos(\varphi_j) & 0 \\ \xi \sin(\varphi_k) & \cos(\varphi_k) & 0 \\ -\xi \text{tg}(\varphi_j) \cos(\varphi_k) & \text{tg}(\varphi_j) \sin(\varphi_k) & 1 \end{bmatrix}; \quad \xi = \begin{cases} 1, & ijk \in \{123, 231, 312\}; \\ -1, & ijk \in \{132, 213, 321\}. \end{cases}$$

Здесь предполагается, что $\varphi_1 = \gamma$, $\varphi_2 = \psi$, $\varphi_3 = \theta$. Соответствующим образом можно представить и динамические уравнения Эйлера:

$$\dot{\omega} = J^{-1}\Omega(\omega)J\omega + J^{-1}M, \quad (19)$$

где $M = \{M_i, i = \overline{1, 3}\}$ — главный момент сил, действующих на объект, в проекциях на оси ССК;

J — тензор инерции твердого тела,

$$J = \begin{bmatrix} J_{ii} & J_{ij} & J_{ik} \\ J_{ij} & J_{jj} & J_{jk} \\ J_{ki} & J_{kj} & J_{kk} \end{bmatrix}; \quad \Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \xi\omega_k & -\xi\omega_j \\ -\xi\omega_k & 0 & \xi\omega_i \\ \xi\omega_j & -\xi\omega_i & 0 \end{bmatrix}; \quad i, j, k = \overline{1, 3}, i \neq j \neq k.$$

Преобразование, переводящее систему (18)–(19) в линейную систему, имеет вид:

$$\dot{x}^1 = x^2; \quad \dot{x}^2 = v, \quad (20)$$

где $x^1 = \text{col}(x_i^1, i = \overline{1, 3})$, $x^2 = \text{col}(x_i^2, i = \overline{1, 3})$ — векторы фазовых координат и фазовых скоростей в пространстве преобразованных переменных; $v = \text{col}(v_i, i = \overline{1, 3})$ — соответствующий вектор управления.

Данное преобразование должно удовлетворять условию:

$$\frac{\partial x^1(\varphi, \omega)}{\partial \omega} = 0 \quad \text{или} \quad x^1 = x^1(\varphi).$$

Задавая $x^1 = \varphi = \text{col}(x_1^1 = \varphi_i, x_2^1 = \varphi_j, x_3^1 = \varphi_k)$, $i, j, k = \overline{1, 3}$, $i \neq j \neq k$ и дифференцируя эти соотношения по времени, будем иметь:

$$x^2 = \dot{x}^1 = \left[\frac{\partial x^1(\varphi)}{\partial \varphi} \right] \dot{\varphi} = \dot{\varphi} = \Psi(\varphi)\omega. \quad (21)$$

Соответствующие выражения для управлений можно записать в виде:

$$v = \dot{x}^2 = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (\Psi(\varphi)\omega) \right] \dot{\varphi} + \left[\frac{\partial}{\partial \omega} (\Psi(\varphi)\omega) \right] \dot{\omega} = F(\varphi, \omega)\dot{\varphi} + \Psi(\varphi)\dot{\omega} = F(\varphi, \omega)\Psi(\varphi)\omega + \Psi(\varphi)J^{-1}[\Omega(\omega)J\omega + M], \quad (22)$$

$$\text{где } F(\varphi, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin(\varphi_j)[\omega_i \cos(\varphi_k) - \xi\omega_j \sin(\varphi_k)]}{\cos^2(\varphi_j)} & \frac{-\omega_i \sin(\varphi_k) - \xi\omega_j \cos(\varphi_k)}{\cos(\varphi_j)} \\ 0 & 0 & -\omega_j \sin(\varphi_k) + \xi\omega_i \cos(\varphi_k) \\ 0 & \frac{\omega_j \sin(\varphi_k) - \xi\omega_i \cos(\varphi_k)}{\cos^2(\varphi_j)} & \text{tg}(\varphi_j)[\omega_j \cos(\varphi_k) + \xi\omega_i \sin(\varphi_k)] \end{bmatrix}.$$

Соотношение (22) может быть разрешено относительно M при условии, что $\varphi_j \in (-\pi/2, \pi/2)$:

$$M = J\Psi^{-1}(\varphi)[v - F(\varphi, \omega)\Psi(\varphi)\omega] - \Omega(\omega)J\omega. \quad (23)$$

Таким образом, соотношения (22) и (23) полностью определяют искомое преобразование. Однако для решения задач синтеза управления угловым движением твердого тела с учетом ограниченности мощности системы исполнительных органов преобразование в полученной форме к использованию непригодно.

Действительно, пусть на вектор управляющих моментов M в системе (18)–(19) наложено ограничение вида $M \in U_M$, где U_M — замкнутая область в пространстве управлений. Тогда из (23) следует, что

$$M = J\Psi^{-1}(\varphi)[v - F(\varphi, \omega)\Psi(\varphi)\omega] - \Omega(\omega)J\omega \in U_M. \quad (24)$$

Задача оптимальной переориентации твердого тела формулируется в следующем виде. Требуется перевести систему (13) из начального состояния $x^1(0) = x_0^1$, $x^2(0) = x_0^2$ в конечное $x^1(T) = x_T^1$, $x^2(T) = x_T^2$ с учетом ограничений на управления вида (24) и при этом оптимизировать некоторый показатель качества.

Данная задача не может быть решена традиционными методами, поскольку ограничения на v сложным образом зависят от фазовых координат. В связи с этим возникает необходимость дальнейшей модификации линеаризующих преобразований (21), (22) с тем, чтобы они были пригодны для использования при синтезе управления угловыми маневрами твердого тела. Наиболее очевидной представляется попытка упростить каким-либо образом ограничения (24). С этой целью предлагается построить приближенное обратное преобразование системы (20) к линейной псевдокоординатной форме. При этом вид системы (20) не изменяется (в первом приближении), а ограничения на управляющие параметры в новой системе значительно упрощаются (приводятся к исходным). Однако новые координаты, строго говоря, не являются координатами в общепринятом смысле, поскольку они описывают реальное движение объекта с некоторой степенью приближения. В связи

с этим рассматриваемое отображение и названо псевдокоординатным.

Методика псевдокоординатной линеаризации уравнений углового движения многосвязного динамического объекта с присоединенными упругими элементами конструкции

Математическая модель процесса управляемого углового движения объекта, представляющего собой твердое тело (корпус) с присоединенными к нему упругими элементами конструкции (УЭК), может быть представлена в виде [1, 5]:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \Psi(\varphi)\omega; \\ \dot{\omega} = I^{-1}\Omega(\omega)J\omega + I^{-1}M^*, \end{cases} \quad (25)$$

где $M^* = M + \sum_{s=1}^N A_s(D_s \dot{q}_s + \Omega_s q_s)$.

Структурная эквивалентность математических моделей (25) и (18)–(19) позволяет воспользоваться разработанной методикой псевдокоординатной линеаризации.

Согласно этой методике, на первом этапе вводятся новые координаты (21) и система (25) точно преобразуется в промежуточную систему вида:

$$\dot{x}^1 = x^2; \quad \dot{x}^2 = v^*, \quad (26)$$

где $v^* = F(\varphi, \omega)\Psi(\varphi)\omega + \Psi(\varphi)I^{-1}[\Omega(\omega)J\omega + M^*]$;

$$F(\cdot) = \frac{\partial[\Psi(\varphi)\omega]}{\partial\varphi}.$$

Как и в случае твердого тела, вектор-функция управлений v^* преобразованной системы (26) нелинейно зависит от параметров, характеризующих текущее положение объекта управления. Данное обстоятельство не позволяет непосредственно перейти к синтезу законов управления из-за сложного вида ограничений, накладываемых на управляющие функции. Поэтому на втором этапе строится приближенное обратное преобразование $(x^1, x^2) \rightarrow (y^1, y^2)$. При этом ограничения на управление преобразуются к исходному виду с сохранением простоты структуры уравнений, описывающих динамику объекта во вновь преобразованном координатном базисе (y^1, y^2) :

$$\dot{y}^1 = y^2; \quad \dot{y}^2 = w^*,$$

где $w^* = M^*$;

$$y^j(0) = y_0^j;$$

$$y^j(T) = 0, \quad j = 1, 2;$$

$$\vartheta = \hat{\Phi}^{-1}(\varphi)\varphi;$$

$$y^1 = I\hat{\Psi}^{-1}(\varphi)(\varphi - \varphi_T) - 0,5\Omega(\vartheta)J\vartheta + \sigma I\omega_T;$$

$$y^2 = I(\omega - \omega_T) + \frac{1}{\sigma}\Omega(\vartheta)J\vartheta.$$

Система уравнений в псевдокоординатах, описывающая управляемую угловую динамику объекта с присоединенными УЭК, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = y^2; \\ \dot{y}^2 = \sum_{s=1}^N A_s(D_s \dot{q}_s + \Omega_s q_s) + w; \\ \ddot{q} = -D_s^* \dot{q}_s - \Omega_s^* q_s - w_s; \end{cases}$$

где $w_s = K_s[\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq s}}^N A_j(D_j \dot{q}_j + \Omega_j q_j) + \Omega(\omega)J\omega + w]$, $w = M$.

Кроме того, пренебрегая взаимовлиянием УЭК через корпус объекта, можно записать:

$$w_s = K_s[\Omega(\omega)J\omega + w]. \quad (27)$$

Анализируя соотношения (25) и (27), можно убедиться в том, что динамика упругой системы не зависит от проведенного преобразования координатных базисов. Уравнения колебаний в исходной системе (25) были линейными, линейными они остались и в ре-

зультатирующей системе (27). Это существенное преимущество применяемого метода линеаризующих отображений. Кроме того, весьма удобно совпадение векторов управляющих моментов (M и w) исходной (25) и результирующей (27) систем.

Система (27) удобна для решения задач синтеза управлений угловым движением объектов со сложными динамическими схемами, поскольку каналы управления системы могут рассматриваться независимо. Более того, полученная динамическая система хорошо согласуется с принципом квазизатвердевания упругого элемента (УЭ) в процессе функционирования системы управления угловым движением объекта, реализация которого позволяет осуществить динамическую развязку движений корпуса объекта и присоединенных УЭ.

Заключение

Таким образом, в статье получена конечномерная математическая модель, применимая для решения задач синтеза оптимального, робастного и финитного управления пространственным угловым движением телеуправляемого летательного аппарата на основе применения метода псевдокоординатной линеаризации. Применение полученной модели позволяет осуществить динамическую развязку движений корпуса объекта и присоединенных УЭ, что, в свою очередь, позволяет повысить качество решения целевых задач летательным аппаратом.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г. Управление космическими летательными аппаратами. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1974. 340 с.
2. Атанс М., Фалб П. Л. Оптимальное управление = Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications / пер. с англ. Г. Н. Алексакова; под ред. Ю. И. Топчиева. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. Городецкий В. И. Прикладная алгебра и дискретная математика: в 3 ч. Ч. 1. Алгебраические системы. Л.: МО СССР, 1984. 174 с.
4. Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
5. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 232 с.
6. Кейн Т. Р., Левинсон Д. А. Вывод уравнений движения для сложных космических аппаратов // Ракетная техника и космонавтика = AIAA Journal: журнал Американского института аэронавтики и космонавтики. 1980. Т. 18, № 9–10. С. 158–173.

Дата поступления: 01.08.2025

Решение о публикации: 21.08.2025

Linearization of the Motion Model of a Multi-Connected Dynamic Object by Pseudo-Coordinate Linearization

Yuri S. Manuilov — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Independent Researcher. Research interests: management of complex organizational and technical facilities, optimization of complex operations. E-mail: manuilov.yuriy@yandex.ru

Andrey V. Tolokonnikov¹ — PhD in Engineering, Lecturer of the Space Radioelectronic Control Department. Research interests: management of complex organizational and technical facilities, operation of technical systems. E-mail: andrew-tolokonnikov@rambler.ru

¹Mozhaisky Military Aerospace Academy, 13, Zhdanovskaya str., Saint Petersburg, Russia, 197198

For citation: Manuilov Yu. S., Tolokonnikov A. V. Linearization of the Motion Model of a Multi-Connected Dynamic Object by Pseudo-Coordinate Linearization. *Intellectual Technologies on Transport*, 2025, No. 3 (43), Pp. 58–67. DOI: 10.20295/2413-2527-2025-343-58-67. (In Russian)

Abstract. *A method is proposed for linearizing a non-linear model of the controlled motion of a multi-connected dynamic object with attached structural elastic elements. The method is founded on the use of non-special transformations of smooth manifolds based on the well-known Lie algebra. **Purpose:** to apply a well-developed theory of optimal linear control based on L. S. Pontryagin's maximum principle or R. Bellman's principle of optimality. **Methods:** the general theoretical approach of pseudo-coordinate linearization is considered, and the procedure for linearizing the model of controlled angular motion of a remote-controlled aircraft is illustrated. **Practical significance:** a finite-dimensional mathematical model has been obtained that is applicable to solving the synthesis problems of optimal, robust and finite control of spatial angular motion of a remote-controlled aircraft.*

Keywords: *non-linear differential equations, pseudo-coordinate linearization, optimal, robust and finite control*

REFERENCES

1. Alekseev K. B., Bebenin G. G. Upravlenie kosmicheskimi letatelnyimi apparatami [Control of spacecraft]. Moscow, Mashinostroenie Publishing House, 1974, 340 p. (In Russian)
2. Athans M., Falb P. L. Optimalnoe upravlenie [Optimal Control]. Moscow, Mashinostroenie Publishing House, 1968, 764 p. (In Russian)
3. Gorodetsky V. I. Prikladnaya algebra i diskretnaya matematika. Chast 1. Algebraicheskie sistemy [Applied Algebra and Discrete Mathematics: in 3 parts. Part 1. Algebraic Systems]. Leningrad [Saint Petersburg], Ministry of Defense of the USSR, 1984, 174 p. (In Russian)
4. Degtyarev G. L., Sirazetdinov T. K. Teoreticheskie osnovy optimalnogo upravleniya uprugimi kosmicheskimi apparatami [Theoretical Foundations of Optimal Control of Elastic Spacecraft]. Moscow, Mashinostroenie Publishing House, 1986, 216 p. (In Russian)
5. Dokuchaev L. V. Nelineynaya dinamika letatelnykh apparatov s deformiruemymi elementami [Nonlinear Dynamics of Aircraft with Deformable Elements]. Moscow, Mashinostroenie Publishing House, 1987, 232 p. (In Russian)
6. Kane T. R., Levinson D. A. Vyvod uravneniy dvizheniya dlya slozhnykh kosmicheskikh apparatov [Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft], *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika [AIAA Journal]*, 1980, Vol. 18, No. 9–10, Pp. 158–173. (In Russian)

Received: 01.08.2025

Accepted: 21.08.2025